THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES OU TVI

Ce théorème concerne les fonctions continues, dérivables et définies sur un intervalle donné. Si une fonction continue sur un intervalle fermé prend deux valeurs m et n , alors elle prend toutes les valeurs réelles intermédiaires entre m et n .

Il permet de trouver l'existence, si elle existe, des solutions des équations du type $f(x) = k$ et en donne une solution approchée (la plupart du temps, il est demandé un encadrement de cette valeur).

Énoncé du théorème :

Soit une fonction définie et continue sur un intervalle I fermé et à valeurs sur $\mathbb{R}$, alors l'image $f(I)$ est un intervalle, c'est-à-dire que $f(I)$ prend l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ où $x \in I$

Autre énoncé (type lycée) :

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, définie, dérivable et strictement monotone alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel tel que $f(x) = k$.

Démonstration :

Si une fonction f est continue sur un intervalle I , l'image de I , notée $f(I)$ est l'ensemble de tous les nombres $f(x)$ où $x \in I$.

De plus, on a $f(a) \in I$ et $f(b) \in I$, donc $k \in f(I)$, puisque $f(I)$ est un intervalle et k est intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$

Donc, il existe $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = k$

Cas particulier : théorème de Bolzano :

Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe, il existe au moins un réel α compris entre a et b tel que $f(\alpha) = 0$

Remarques :

- ✚ Il permet la démonstration de théorème de la bijection
- ✚ Lorsque f est strictement monotone, elle est injective, donc la solution est unique