Equation du second degré

En mathématiques, une équation du second degré est une équation polynomiale de degré 2. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, et les coefficients a, b et c sont des réels ou complexes

Elle admet au plus deux solutions (le degré indique le nombre de solutions maximales que va admettre l'équation polynomiale) qui correspondent aux points d'intersections de la parabole $y = ax^2 + bx + c$ avec l'axe des abscisses.

Le nombre de solutions est donné pas le signe du discriminant. Ce dernier permet de calculer les racines de l'équation.

Calcul du discriminant :

$\Delta = b^2 - 4ac$

Résolution de l'équation dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ avec le discriminant :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 0,1 ou 2 solutions.

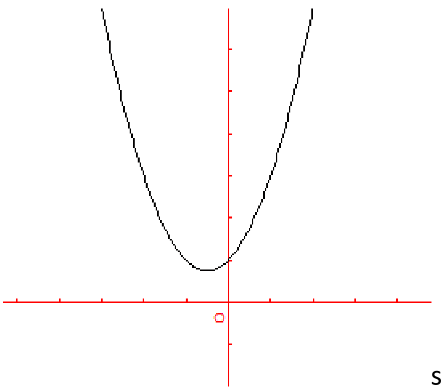
On distingue trois cas possibles :

- **Cas $\Delta < 0$:**

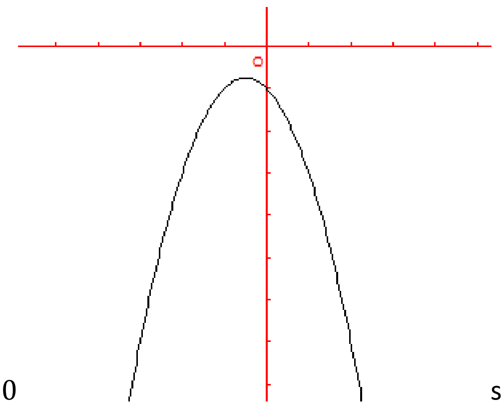
L'équation n'admet aucune solution

La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, et sa forme dépend du signe de a.

Il n'y a pas de factorisation possible.



si $a > 0$



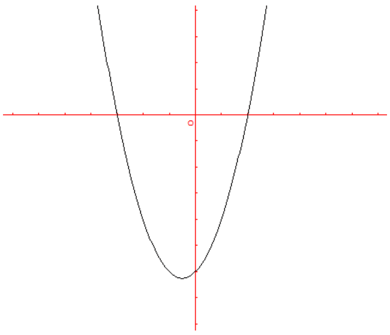
si $a < 0$

- **Cas $\Delta > 0$:**

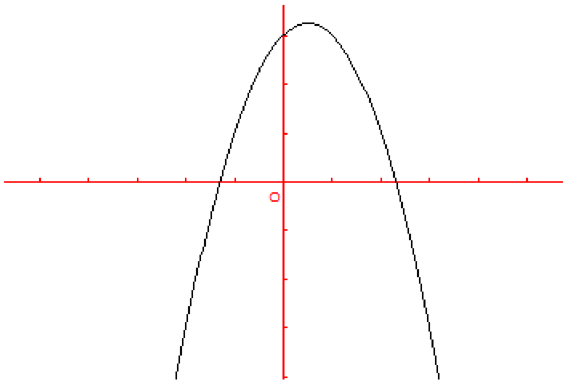
L'équation admet deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

La forme factorisée est : $a(x - x_1)(x - x_2)$



si $a > 0$



si $a < 0$

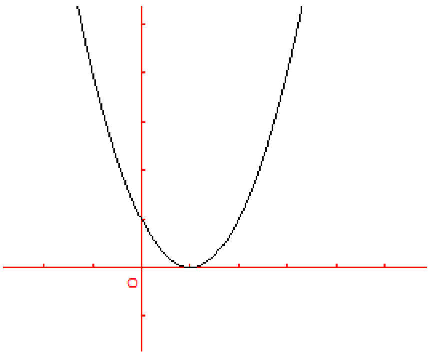
- **Cas $\Delta = \mathbf{0}$:**

L'équation admet une racine double :

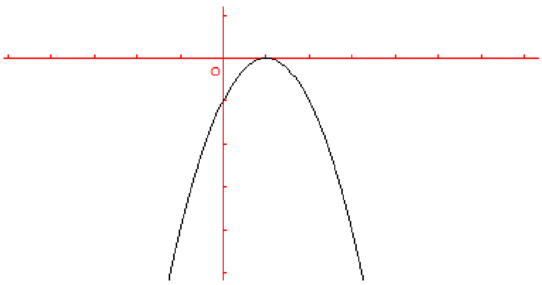
$x' = \frac{-b}{2a}$

La parabole coupe une fois l'axe des abscisses.

La forme factorisée est $a(x - x')^2$



si $a > 0$



si $a < 0$

Relations avec les racines :

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Démonstration :

- $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  $= -\frac{2b}{2a}$

  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

- $x_1 x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) * \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ (identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$)

  $= \frac{b^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}$

  Or $\Delta = b^2 - 4ac$, donc on a

  $x_1 x_2 = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$

  $= \frac{4ac}{4a^2}$

  $x_1 x_2 = \frac{a}{c}$

Résolution de l'équation dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ avec la forme canonique :

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on peut passer par la forme canonique. Il s'agit de faire apparaître une identité remarquable, vue au collège.

On peut factoriser par a, car $a \neq 0$. On a donc :

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

On reconnaît le début d'une identité remarquable : $x^2 + \frac{b}{a}x$

Soit : $\frac{b}{a}x = \frac{2b}{2a}x$

On a :

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]\\
&= a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]
\end{aligned}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$$

$$\leftrightarrow x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus la forme canonique permet de trouver le sommet de la fonction du second degré :

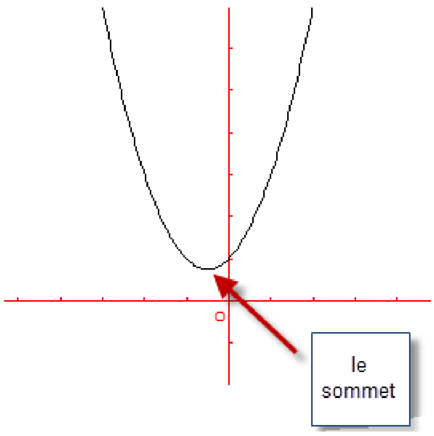
Les coordonnées du sommet sont $S\left(-\frac{b}{2a}\,; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

La forme canonique est donc :

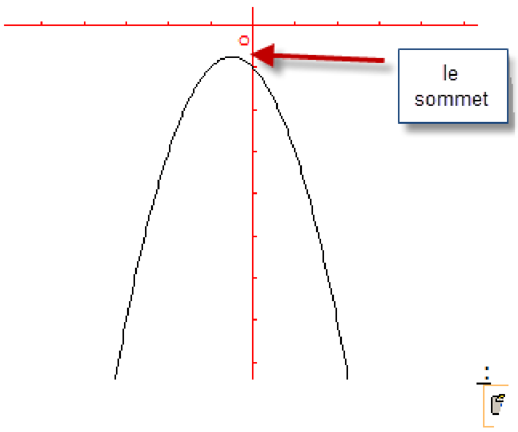
$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

Interprétation graphique :



Maximum



Minimum

Résolution de l'équation dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$ avec le discriminant :

L'équation est de la forme $az^2 + bz + c = 0$, avec z un nombre complexe de la forme $z = a + ib$ (cf chapitre sur les nombres complexes)

La résolution des **Cas** $\Delta > \mathbf{0}$ **et Cas** $\Delta = \mathbf{0}$ reste la même que dans l'ensemble des réels (cf cours sur les nombres complexes)

Cas $\Delta < \mathbf{0}$ **:**

La résolution devient la suivante :

$x_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Car $\Delta = i^2(b^2 - 4ac)$, et ainsi, les racines sont des nombres complexes

Plus de détails seront fournis sur le chapitre des nombres complexes !