Equation du second degré

En mathématiques, une équation du second degré est une équation polynomiale de degré 2. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, et les coefficients a, b et c sont des réels **ou complexes (niveau terminale)**.

Elle admet au plus deux solutions (le degré indique le nombre de solutions maximales que va admettre l'équation polynomiale) qui correspondent aux points d'intersections de la parabole

$y = ax^2 + bx + c$ avec l'axe des abscisses.

Le nombre de solutions est donné pas le signe du discriminant. Ce dernier permet de calculer les racines de l'équation.

Calcul du discriminant :

$\Delta = \ b^2 - 4ac$

Résolution de l'équation dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ avec le discriminant :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet 0,1 ou 2 solutions.

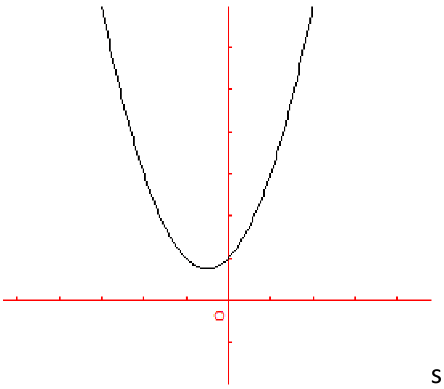
On distingue trois cas possibles :

- **Cas $\Delta < \mathbf{0}$:**

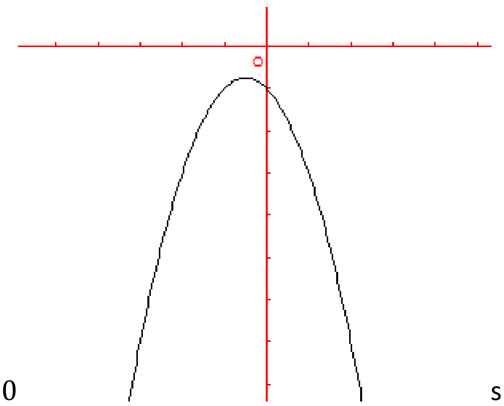
L'équation n'admet aucune solution

La parabole ne coupe pas l'axe des abscisses, et sa forme dépend du signe de a.

Il n'y a pas de factorisation possible.



si $a > 0$



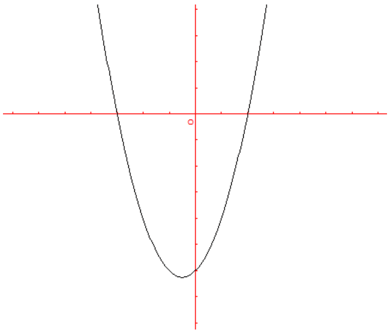
si $a < 0$

- **Cas $\Delta > \mathbf{0}$:**

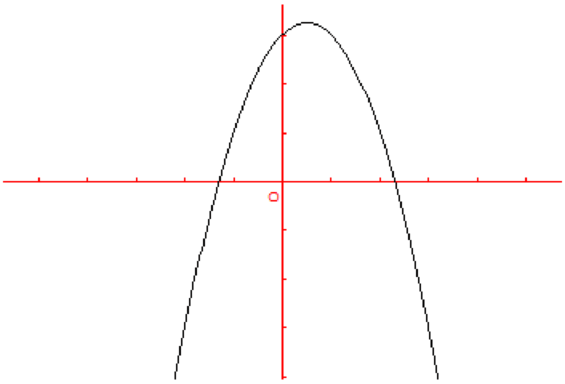
L'équation admet deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

La forme factorisée est : $a(x - x_1)(x - x_2)$



si $a > 0$



si $a < 0$

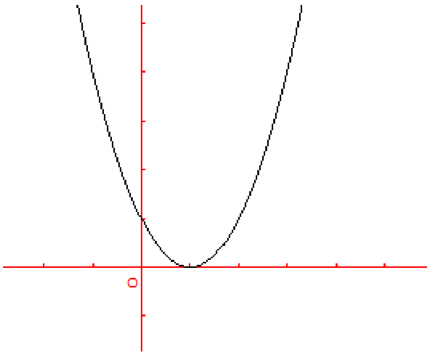
- **Cas $\Delta = \mathbf{0}$** :

L'équation admet une racine double :

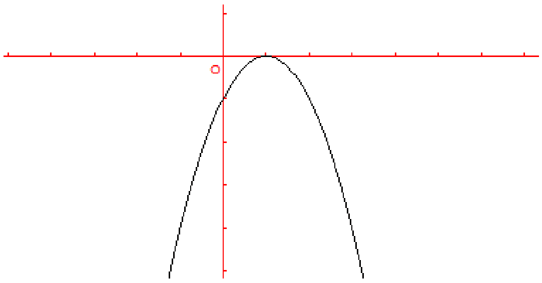
$x' = \frac{-b}{2a}$

La parabole coupe une fois l'axe des abscisses.

La forme factorisée est $a(x - x')^2$



si $a > 0$



si $a < 0$

Relations avec les racines :

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Démonstration :

- $x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

  $= -\frac{2b}{2a}$

  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

- $x_1 x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) * \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ (identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

  $= \frac{b^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$

  Or $\Delta = b^2 - 4ac$, donc on a

  $x_1 x_2 = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}$

  $= \frac{4ac}{4a^2}$

  $x_1 x_2 = \frac{a}{c}$

Résolution de l'équation dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ avec la forme canonique :

Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, on peut passer par la forme canonique. Il s'agit de faire apparaître une identité remarquable, vue au collège.

On peut factoriser par a, car $a \neq 0$. On a donc :

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$

On reconnaît le début d'une identité remarquable : $x^2 + \frac{b}{a}x$

Soit : $\frac{b}{a}x = \frac{2b}{2a}x$

On a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ &= a\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \end{aligned}$$

$$ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$$

$$\leftrightarrow x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

De plus la forme canonique permet de trouver le sommet de la fonction du second degré :

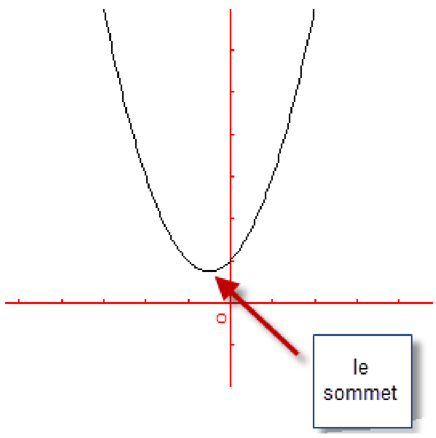
Les coordonnées du sommet sont $S\left(-\frac{b}{2a}\,;f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

La forme canonique est donc :

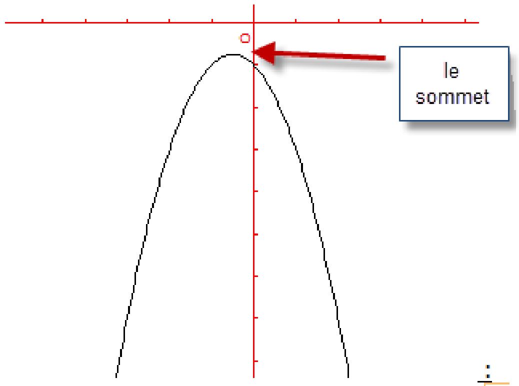
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$

Avec $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=f\left(-\frac{b}{2a}\right)$

<u>Interprétation graphique:</u>



Maximum



Minimum